



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

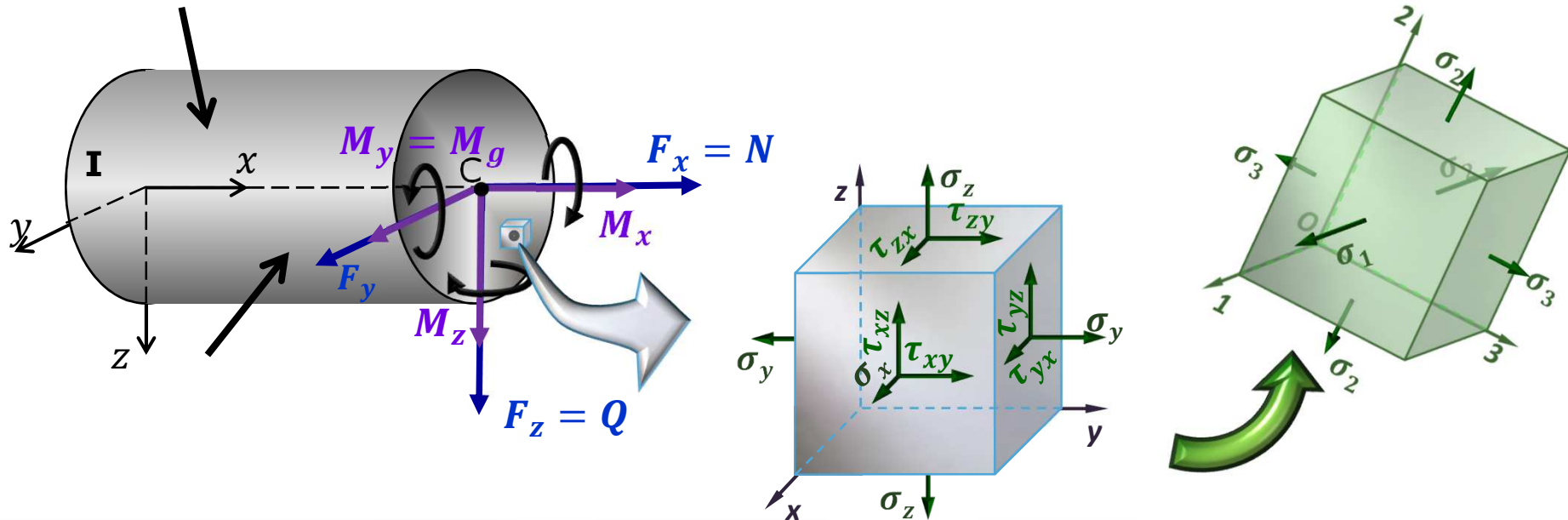
# Podstawy wytrzymałości materiałów

## IMiR - IA - Wykład Nr 10

### Złożony stan naprężeń - wyężenie materiału

stan krytyczny materiału, pojęcie wyężenia, cel stosowania hipotez wyężeniowych, naprężenie zredukowane, przegląd hipotez wyężeniowych: hipoteza Galileusza, hipoteza de Saint-Venanta, hipoteza Coulomba (C-T-G), hipoteza Hubera (H-M-H), zginanie ze skręcaniem przekrojów kołosymetrycznych, moment zredukowany, warunek bezpieczeństwa, przykłady obliczeniowe.

## 10.1. Pojęcie wyęczenia



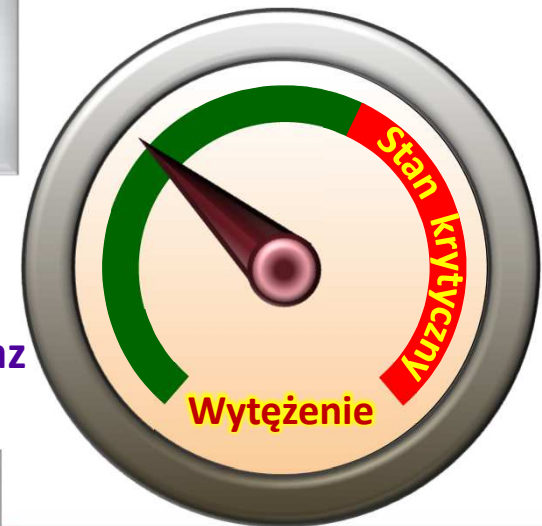
**Wyęczenie** – ogół zmian w stanie fizycznym ciała prowadzących do wystąpienia trwałych odkształceń i w rezultacie utraty spójności materiału. Stopień zbliżenia się materiału do **stanu krytycznego**.

**Stan krytyczny** – granica plastyczności ( $R_e$ ) - mat. elasto-plastyczne, granica wytrzymałości ( $R_m, R_c$ ) – mat. kruche.

**Wyęczenie (W)** jest funkcją stanu naprężenia materiału oraz jego odpowiednich o stałych materiałowych (C):

$$W = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, C)$$

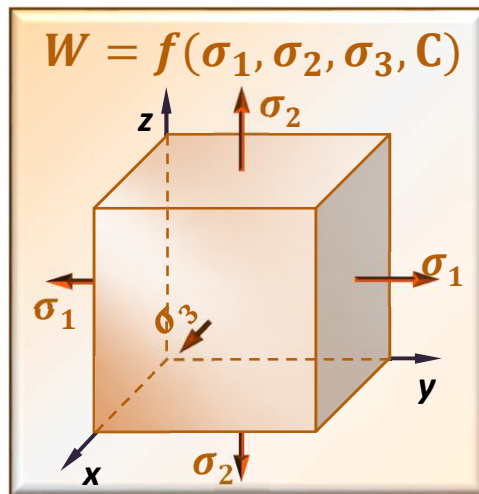
$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$



## 10.2. Naprężenie zredukowane

Aby określić stopień zbliżenia się materiału poddanemu złożonemu stanowi naprężenia do stanu krytycznego, wyężenie dla tego stanu porównuje się z wyężeniem dla przypadku jednoosiowego rozciągania tzw. **naprężeniem zredukowanym**  $\sigma_{zr}$ :

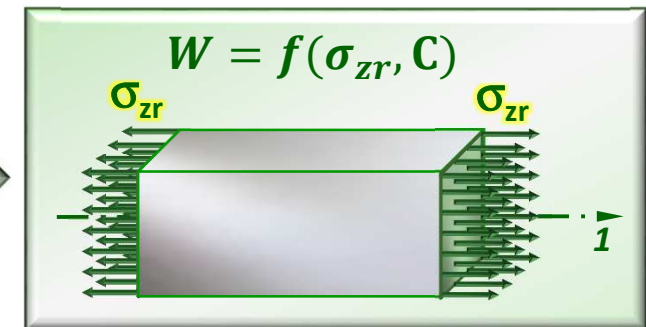
**Złożony stan naprężenia**



**Hipoteza  
wyężeniowa**

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C) = f(\sigma_{zr}, C)$$

**Jednoosiowe rozciąganie:**



$$\sigma_{zr} = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

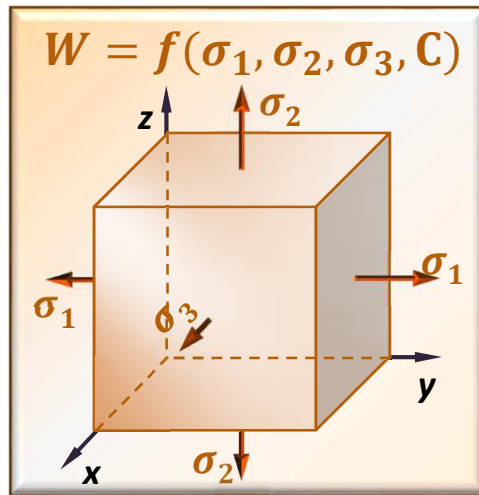
$f, \varphi$  – funkcje zależne od przyjętej hipotezy wyężeniowej

**Naprężenie zredukowane** ( $\sigma_{zr}$ ) – taka wartość naprężenia, wyznaczona dla danego złożonego stanu naprężenia przy użyciu przyjętej hipotezy wyężeniowej, która przy jednoosiowym rozciąganiu tego samego materiału, wywołałaby identyczne wyężenia jakie ma miejsce w rozpatrywanym stanie naprężenia.

**Hipoteza wyężeniowa** – założenie dotyczące tego, jaka wielkość fizyczna, związana ze stanem naprężenia i odkształcenia, decyduje o wyężeniu materiału.

## 10.2. Naprężenie zredukowane

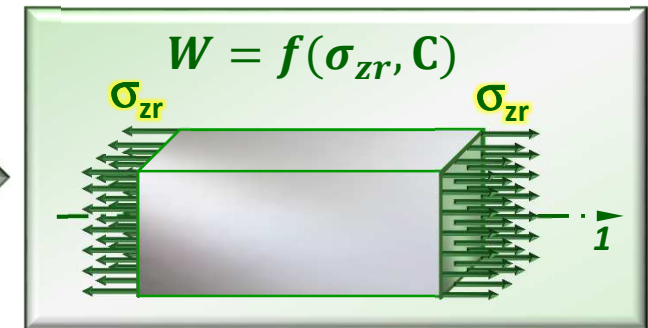
### Złożony stan naprężenia



### Hipoteza wyężeniowa

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C) = f(\sigma_{zr}, C)$$

### Jednoosiowe rozciąganie:



### Warunek bezpieczeństwa:

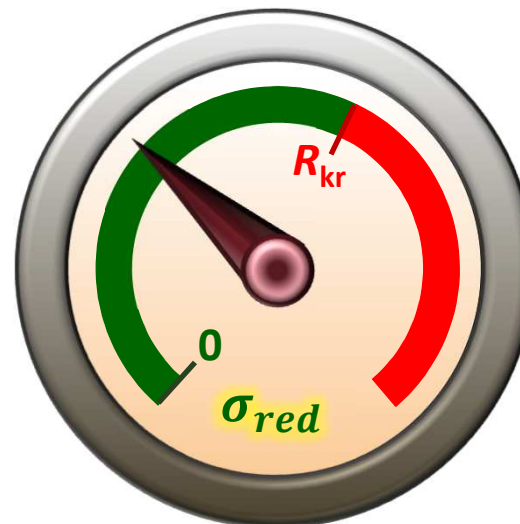
$$\sigma_{zr} \leq k_r$$

$k_r$  – dopuszczalne naprężenia rozciągające

$R_{kr}$  – naprężenia krytyczne ( $R_e, R_m, R_c$ )



≡



## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

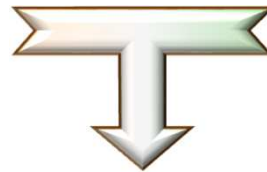
### 10.3.1. Hipoteza Galileusza (1632)

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość **maksymalnych naprężeń rozciągających** ( $\sigma_{max}$ ).

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1$$



Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{zr}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 \leq k_r$$

Cechy:

✓ nie uwzględniony wpływ naprężeń  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  na wyężenie materiału,

Modyfikacja hipotezy Galileusza: **Clebsch (1862)** i **Rankin (1856)**

**Założenie:** O wyężeniu decyduje największa bezwzględna wartość **ekstremalnych naprężeń normalnych:**  $\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$

$$\sigma_{zr} = \max\left(\sigma_1, \frac{|\sigma_3|}{z}\right) \leq k_r$$

gdzie  $z = \frac{k_c}{k_r}$  - dopuszczalne naprężenia ściskające  
- dopuszczalne naprężenia rozciągające

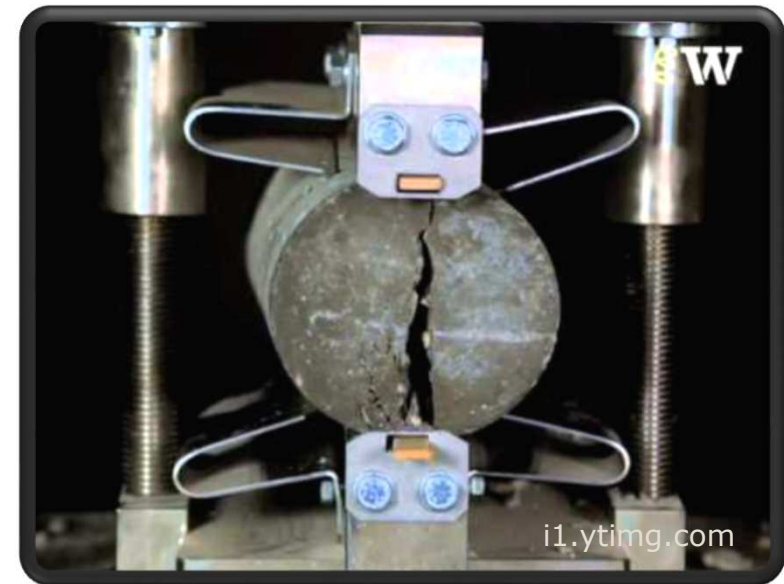
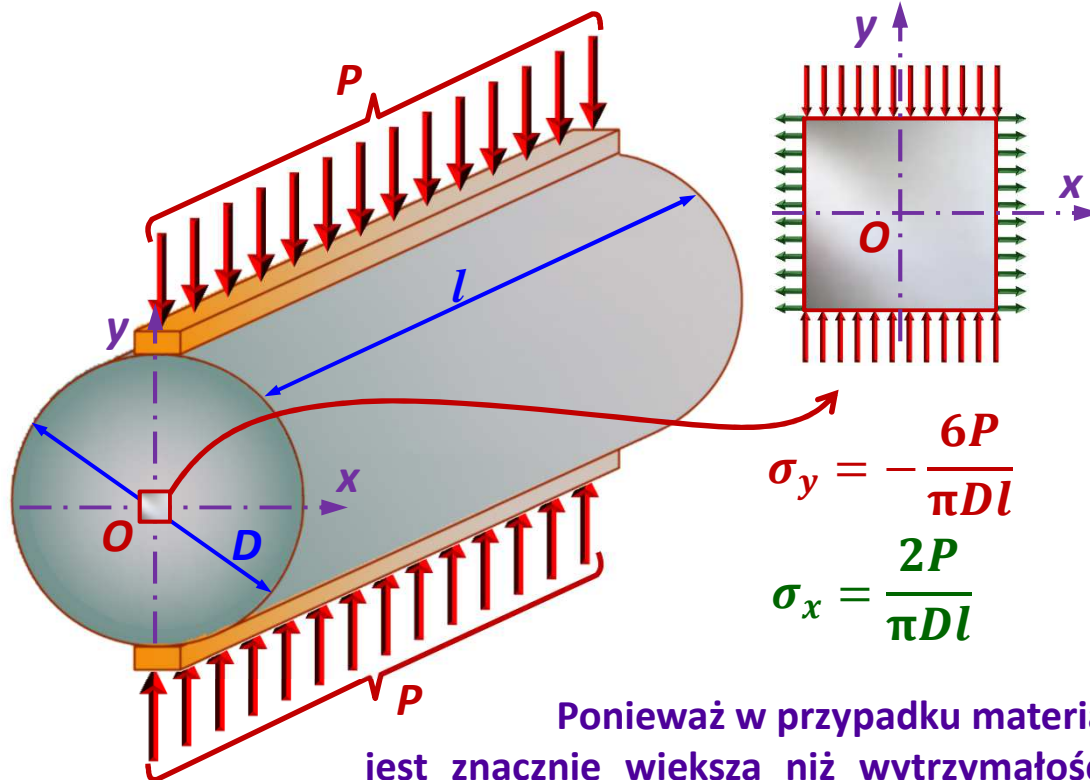
czyli, żadne z naprężeń normalnych nie może być większe od  $k_r$  ani mniejsze od  $(-k_c)$

Obecnie hipoteza Galileusza, nawet w postaci zmodyfikowanej jest stosowana rzadko i jedynie w przypadku materiałów kruchych.

## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

### 10.3.1. Hipoteza Galileusza (1632)

Hipoteza Galileusza stanowi m.in. teoretyczną podstawę pozwalającą na wyznaczanie wytrzymałości na rozciąganie w badaniu na rozłupywanie  $f_{cl}^{spl}$  materiałów kruchych (ang. *indirect tensile strength test*)



Ponieważ w przypadku materiałów kruchych wytrzymałość na ściskanie ( $R_c$ ) jest znacznie większa niż wytrzymałość na rozciąganie ( $R_m$ ), przyjmuje się, że za zniszczenie elementu (rozłupanie) pod wpływem siły  $P_{max}$  odpowiadają dodatnie co wartości naprężenia  $\sigma_x$ .

Stąd wytrzymałość na rozciąganie przy rozłupywaniu obliczana jest jako:

$$f_{cl}^{spl} = \frac{2P_{max}}{\pi D l}$$

## 10.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

### 10.3.2. Hipoteza de Saint Venanta (1832)

**Założenie:** O wytrzymałości decyduje wartość **największego odkształcenia osiowego ( $\epsilon_1$ )**.

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\epsilon_{max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{zr}}{E}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq k_r$$

$$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

Dopuszczalna wartość naprężeń ściskających w świetle hipotezy de Saint Venanta



$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -\sigma \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{zr} = \nu\sigma \leq k_r$$

...a tymczasem wiadomo, że:  $|\sigma| \leq k_c$

$$k_c = \frac{k_r}{\nu}$$

jeżeli:  $\nu=0.1 \div 0.3$

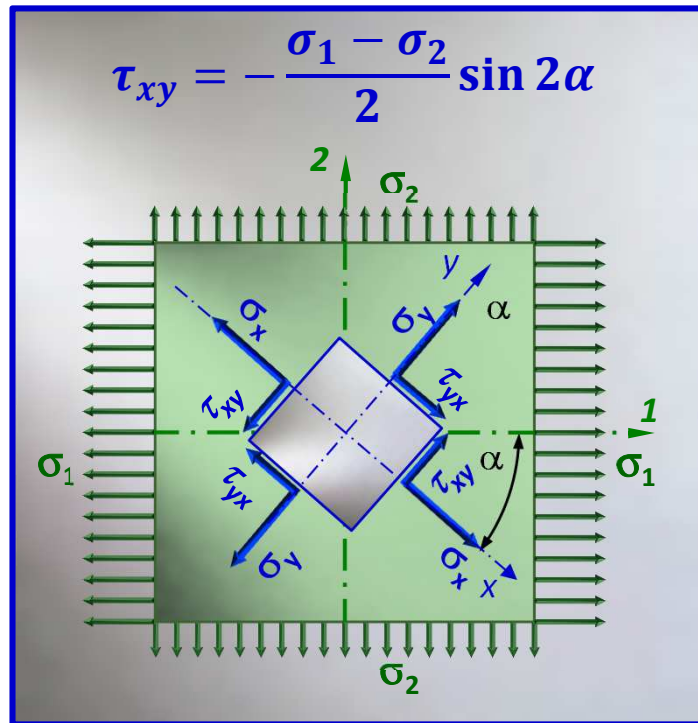
$$k_c = (3 \div 10)k_r$$

Obecnie hipoteza de Saint Venanta bywa stosowana do materiałów kruchych.

## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

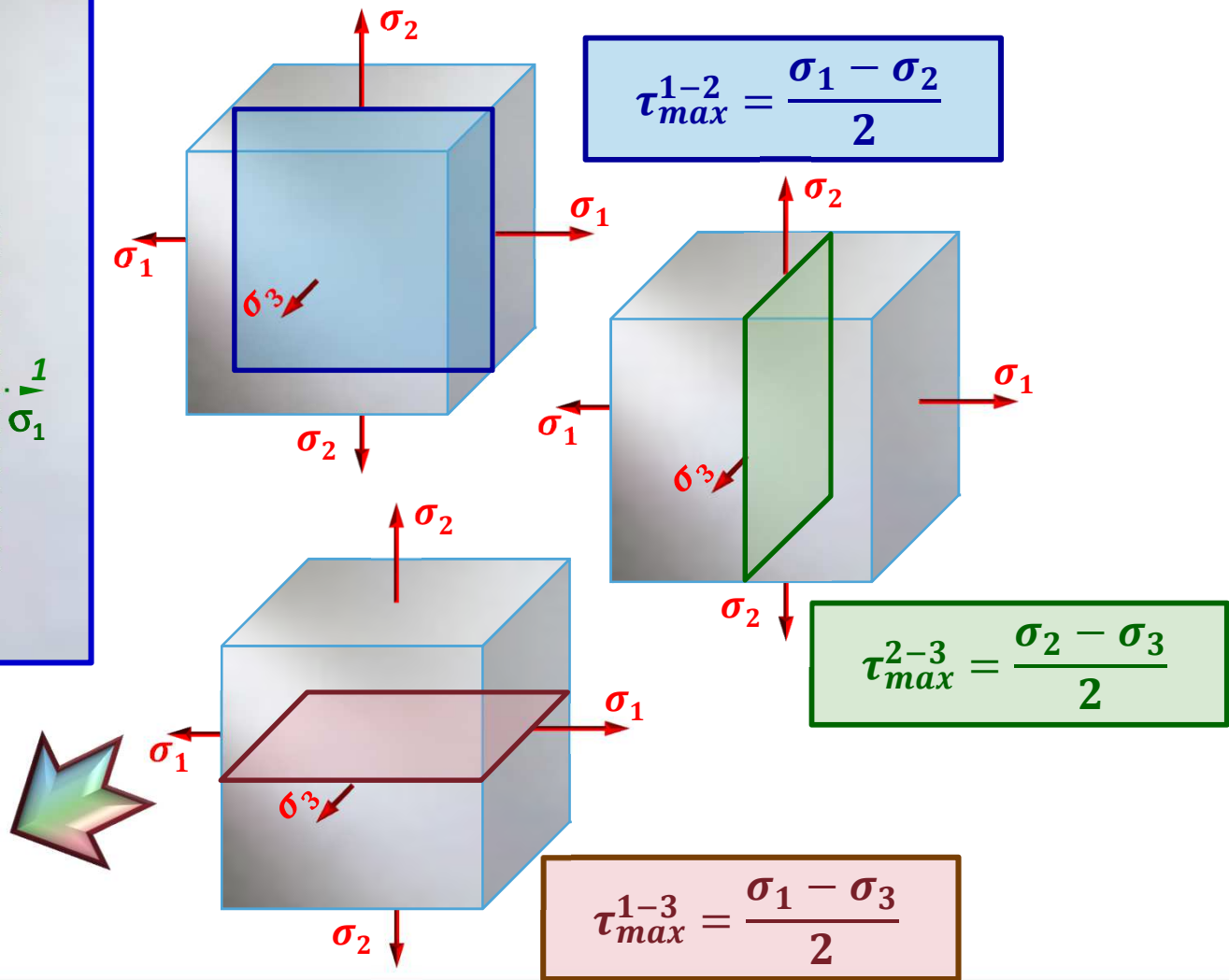
### 10.3.3. Hipoteza Coulomba–Tresca–Guesta (hip. C-T-G, hip. $\tau_{max}$ )

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość maksymalnych naprężeń stycznych ( $\tau_{max}$ ).



$$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

$$\tau_{max} = \tau_{max}^{1-3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$





## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

### 10.3.3. Hipoteza Coulomba–Tresca–Guesta (hip. C-T-G, hip. $\tau_{max}$ )

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość **maksymalnych naprężeń stycznych ( $\tau_{max}$ )**.

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{zr}}{2}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$

$$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

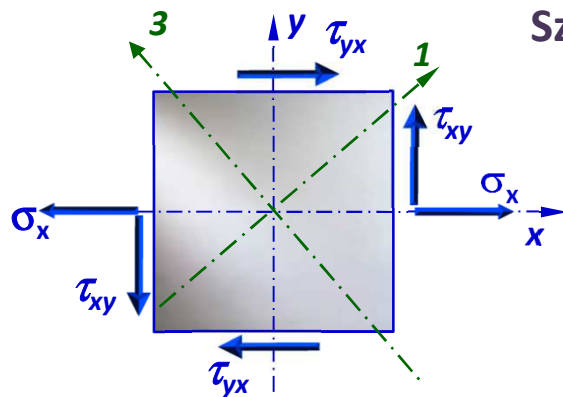
Doświadczenie potwierdza słuszność hipotezy C-T-G w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych, szczególnie poddanych działaniu płaskiego stanu naprężenia (w stanach trójosiowych pominięty zostaje wpływ pośredniego co do wartości naprężenia  $\sigma_2$ ).

## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

### 10.3.3. Hipoteza Coulomba–Tresca–Guesta (hip. C-T-G, hip. $\tau_{max}$ )

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość maksymalnych naprężeń stycznych ( $\tau_{max}$ ).

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$



Szczególny przypadek: działanie naprężeń normalnych i stycznych:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Czyste ścinanie:  $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau$ :

$$\sigma_{zr} = 2\tau \leq k_r$$

...a tymczasem wiadomo, że:

$$\tau \leq k_t$$

$$k_t = 0.5 \cdot k_r$$

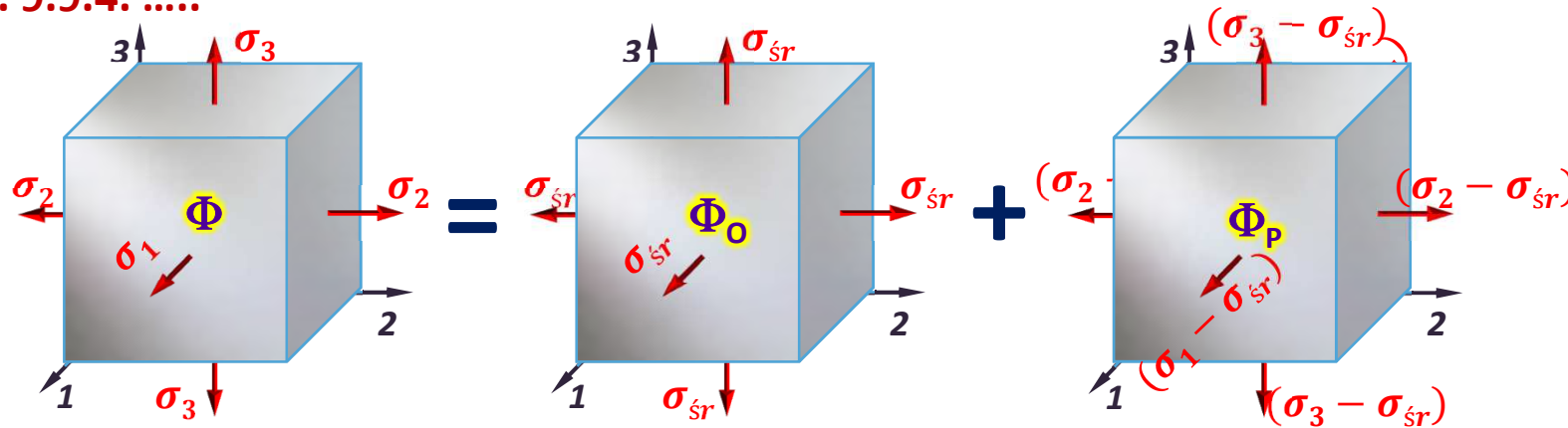
$k_t$  - dopuszczalne naprężenia styczne

## 10.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

### 10.3.4. Hipoteza Hubera–Misesa–Hencky'ego (hip. H-M-H)

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego ( $\Phi_p$ ).

Por. p. 9.9.4. ....



**Energia właściwa odkształcenia objętościowego**

$$\Phi_o = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$\Phi_o = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

**Energia właściwa odkształcenia postaciowego**

$$\Phi_p = \Phi - \Phi_o = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\Phi_p = \Phi - \Phi_o = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

### 10.3.4. Hipoteza Hubera–Misesa–Hencky'ego (hip. H-M-H)

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego ( $\Phi_p$ ).

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\Phi_p = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\Phi_p = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{zr}^2$$

Przestrzenny stan naprężenia:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq k_r$$

Płaski stan naprężenia ( $\sigma_3=0$ ):

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq k_r$$

Słuszność hipotezy Hubera została potwierdzona dla materiałów sprężysto-plastycznych, w przypadku których znajduje ona obecnie szerokie zastosowanie.

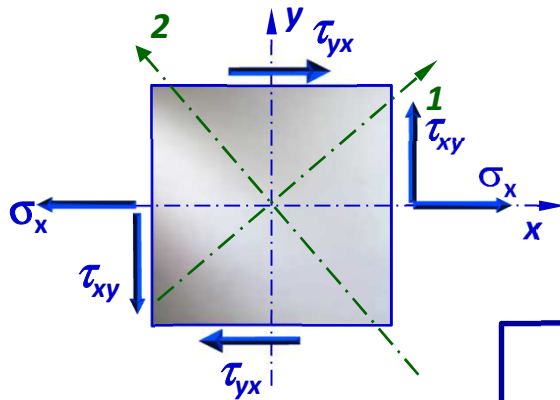
## 10.3. Przegląd hipotez wyężeńiowych

### 10.3.4. Hipoteza Hubera<sup>1904</sup>–Misesa<sup>1913</sup>–Hencky'ego<sup>1925</sup> (hip. H-M-H)

**Założenie:** O wyężeniu decyduje wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego ( $\Phi_p$ ).

Płaski stan naprężenia ( $\sigma_3=0$ ):

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq k_r$$



Działanie naprężeń normalnych i stycznych:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Czyste ścinanie:  $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau$ :

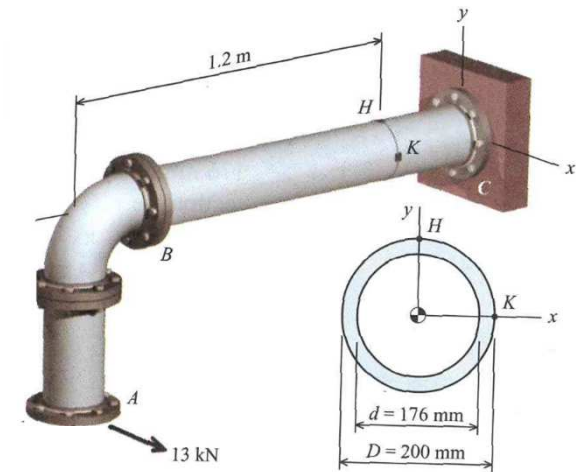
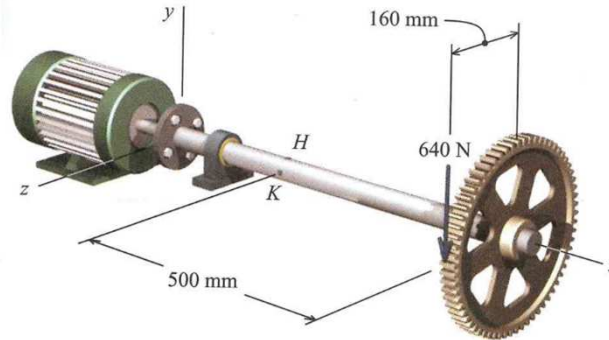
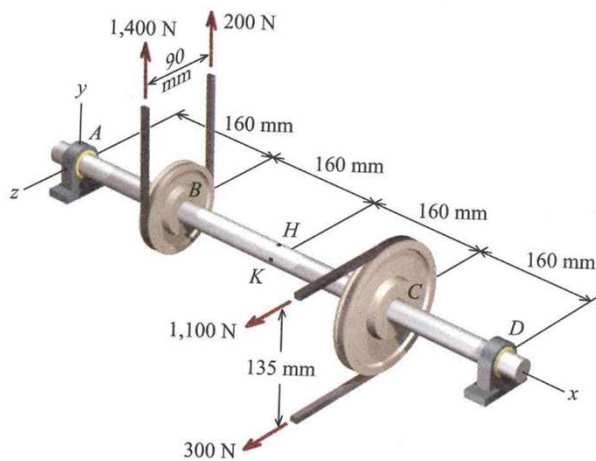
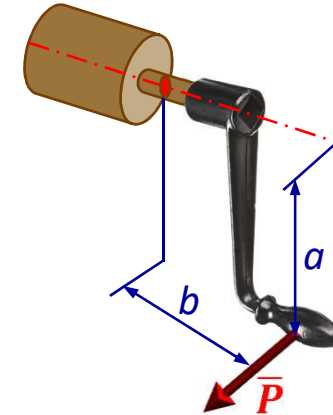
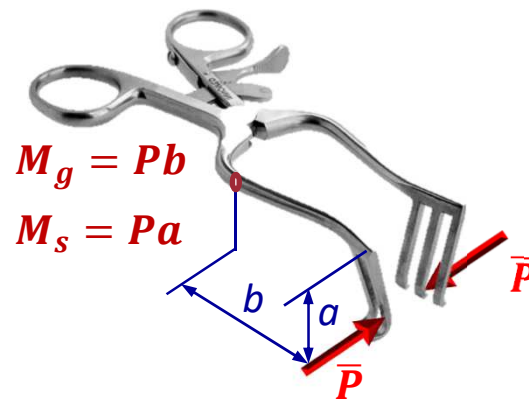
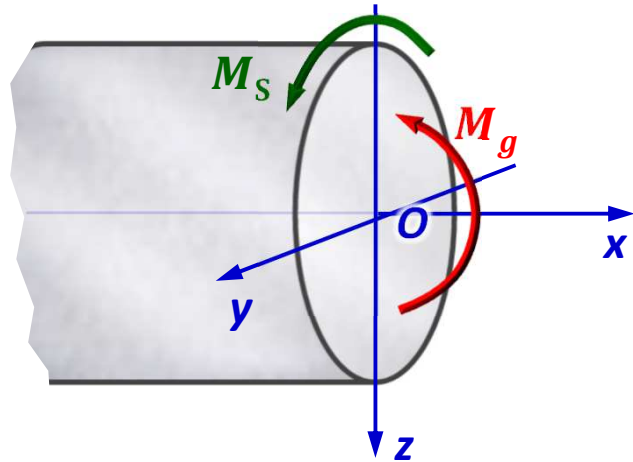
$$\sigma_{zr} = \sqrt{3}\tau \leq k_r$$

...a tymczasem wiadomo, że:

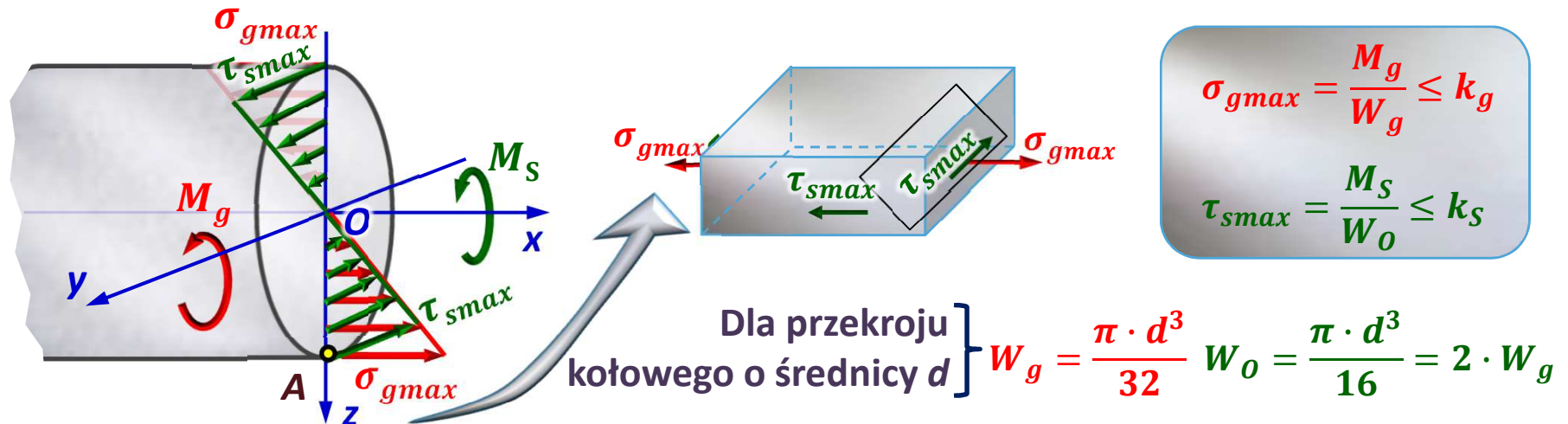
$$\tau \leq k_t$$

$$k_t = \frac{k_r}{\sqrt{3}} \cong 0.59k_r$$

# 10.4. Zginanie ze skręcaniem – wybrane problemy inżynierskie



## 10.4. Zginanie ze skręcaniem – moment zredukowany



Zgodnie z hipotezą C-T-G (hip.  $\tau_{max}$ ):

$$\sigma_{zr,A} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 4\tau_{smax}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_g}\right)^2 + 4\left(\frac{M_s}{2 \cdot W_g}\right)^2} = \frac{1}{W_g} \sqrt{M_g^2 + M_s^2}$$

$M_{zr}$

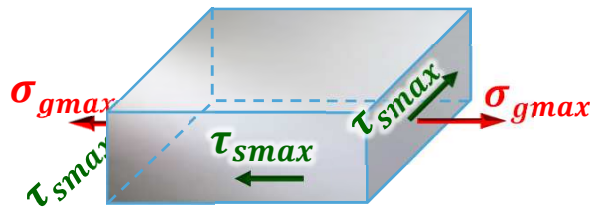
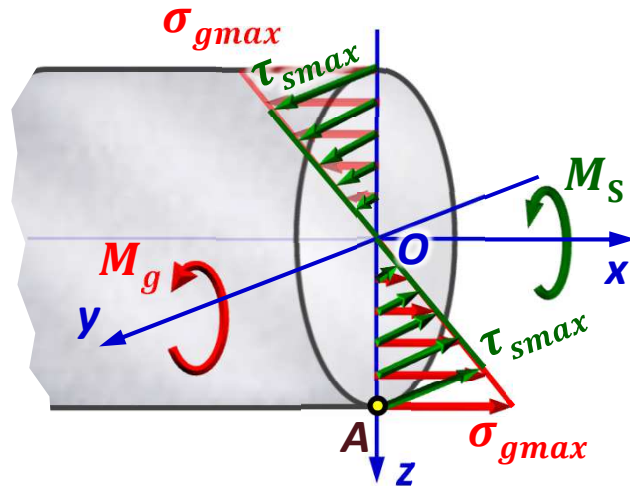
Zgodnie z hipotezą H-M-H:

$$\sigma_{zr,A} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 3\tau_{smax}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_g}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{2 \cdot W_g}\right)^2} = \frac{1}{W_g} \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2}$$

$M_{zr}$

$M_{zr}$  - moment zredukowany

## 10.5. Zginanie ze skręcaniem – warunek bezpieczeństwa



### Warunek bezpieczeństwa

$$\sigma_{zr,max} = \frac{M_{zr}}{W_g} \leq k_g$$

$k_g$  - dopuszczalne naprężenia przy zginaniu

$W_g$  - wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie

$$M_{zr} = \sqrt{M_g^2 + M_s^2}$$

Moment zredukowany  
wg hipotezy C-T-G

$$M_{zr} = \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2}$$

Moment zredukowany  
wg hipotezy H-M-H

Dla przekroju kołowego  
o średnicy  $d$  :

$$\sigma_{zr,max} = \frac{32M_{zr}}{\pi \cdot d^3} \leq k_g$$



$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{zr}}{\pi \cdot k_g}}$$



## 10.6. Zginanie ze skręcaniem – przykład obliczeń

Zaprojektować średnicę wału jak na rys. mając dane:  $N = 30,9\text{kW}$ ,  $n = 200\text{obr/min}$ ,  $D_1 = 300\text{mm}$ ,  $D_2 = 1000\text{mm}$ ,  $Q = 3,5\text{kN}$ ,  $a = 600\text{mm}$ ,  $b = 400\text{mm}$ ,  $c = 500\text{mm}$ ,  $l = 1000\text{mm}$ ,  $k_g = 50\text{MPa}$ . Wykorzystać hipotezę Hubera. Wykonać wykresy  $M_s$ ,  $M_g$ ,  $M_w$ ,  $M_z$ , oraz  $d/2$  wału o stałej wytrzymałości.

